Adı Soyadı:
Numarası:

02.12.2022

2022-2023 GÜZ DÖNEMİ SOYUT MATEMATİK I ARASINAV SORULARI

1) $\left[\left((p\wedge q)\vee q'\right)\vee p'\right]$ önermesi veriliyor.

a) Bu önermenin en sade halini bulunuz.
b) Bu önermenin elektrik devresini kurunuz ve devreden akım geçip geçmediğini belirleyiniz.

2) Her n doğal sayısı için $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$ olduğunu $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$ eşitliğinden faydalanarak gösteriniz.

3) Küme ailesi ve alt küme ailesi nedir, tanımlayınız. Bir X kümesinin alt kümelerinin oluşturduğu iki küme ailesi $\{K_i : i\in I\}$ ve $\{L_j : j\in J\}$ olsun. Bu durumda

$$\left(\bigcap_{i\in I}K_i\right)-\left(\bigcap_{j\in J}L_j\right)=\bigcap_{i\in I}\left[\bigcup_{j\in J}(K_i-L_j)\right]$$

olduğunu gösteriniz.

4) a) Simetrik fark kavramı nedir, tanımlayınız. Arakesit kümesinin simetrik fark üzerine sol dağılma özelliğinin olduğunu **küme özelliklerinden faydalanarak** gösteriniz.

b) Çelişki bulma ispat yöntemini ifade ediniz ve $\sqrt{5}$ sayısının bir irrasyonel sayı olduğunu çelişki bulma ispat yöntemini kullanarak gösteriniz.

5) Bağıntı, denklik bağıntısı ve denklik sınıfı nedir, ayrı ayrı tanımlayınız. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}-\{0\}$ ve $\tau=\{(a,b): a,b\in\mathbb{R}^* \text{ ve } a.b>0\}$ olduğuna göre, τ bağıntısının bir denklik bağıntısı olup olmadığını araştırınız. Eğer denklik bağıntısı ise $\frac{1}{3}$ elemanının denklik sınıfını bulunuz.

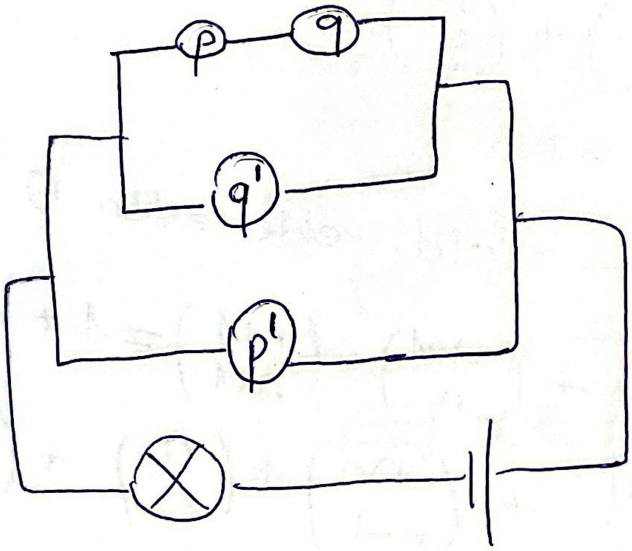
BAŞARILAR
Dr. Çağla ÇELEMOĞLU

Soyut Mat I Arasınav Cevap Anahtarı

1) $[((p\wedge q)\vee q')\vee p']$ önermesi verilsin

$$[((p\wedge q)\vee q')\vee p'] \equiv (p\wedge q)\vee(q'\vee p')$$
$$\equiv (p\wedge q)\vee(p\wedge q)'$$
$$\equiv 1$$

b)



Devreden her zaman akım geçer

2) a) n'e tümevarım uygulayalım

i) $n=0$ için $\binom{n}{0}=1=2^0=1$ olup sağlanır

ii) n için doğru olsun. Yani

$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$ dir.

iii) $n+1$ için doğru old. gösterelim.

$\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}+\cdots+\binom{n+1}{n}+\binom{n+1}{n+1}=2^{n+1}$ olur mu?

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ old sonuda verilmiş

O halde

$$\binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n} + \binom{n}{n+1}^{\to 0}$$

$$\binom{n+1}{n} = \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

$$\vdots$$

$$\binom{n+1}{2} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$$

$$\binom{n+1}{1} = n+1$$

$\binom{n+1}{0} = 1$ old. elde edilir. O halde.

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+1}{n} + \binom{n+1}{n+1} = 1 + n+1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$$

$$+ \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} + \binom{n}{n} + \binom{n}{n+1}$$

$$= \underbrace{1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}}_{2^n}$$

$$+ \underbrace{n+1}_{\binom{n}{1}+\binom{n}{0}} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} + \underbrace{\binom{n}{n+1}}_{0}$$

$$= 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n$$

$$= 2^{n+1}$$

olup $n+1$ için doğrudur

Scanned with CamScanner

3) Tanımlar ders notlarında mevcuttur

$$\left(\bigcap_{i\in I} K_i\right)-\left(\bigcap_{j\in J} L_j\right)=\bigcap_{i\in I}\left[\bigcup_{j\in J}(K_i-L_j)\right]$$

olduğunu gösterelim. Bunun için keyfi bir

$$x\in \bigcap K_i-\bigcap_{j\in J} L_j \overset{\text{Fark kümesi tanımı}}{\iff} x\in\bigcap_{i\in I} K_i \wedge x\notin\bigcap_{j\in J} L_j$$

$$\overset{\text{küme ailesi tanımı}}{\iff} \forall i\in I \text{ için } x\in K_i \wedge \exists j\in J \text{ için}$$

$x\notin L_j$

$$\iff \forall i\in I \text{ ve } \exists j\in J \text{ için } x\in K_i \wedge x\notin L_j$$

$$\overset{\text{Fark kümesi tanımı}}{\iff} \forall i\in I \text{ ve } \exists j\in J \text{ için } x\in K_i-L_j$$

$$\overset{\text{"}\cup\text{" küme ailesi tanımı}}{\iff} \forall i\in I \text{ için } x\in\bigcup_{j\in J}(K_i-L_j)$$

$$\overset{\text{"}\cap\text{" küme ailesi tanımı}}{\iff} x\in\bigcap_{i\in I}\left[\bigcup_{j\in J}(K_i-L_j)\right]$$

4) a) Tanım ders notunda mevcuttur.

$A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C)$ old. gösterelim.

$$A\cap(B\triangle C)\overset{\text{"}\triangle\text{" tanımı}}{=}A\cap((B\cup C)-(B\cap C))$$

$$\overset{\text{"}\cap\text{"nın "}-\text{" üzerine sol dağ. öz.}}{=}[A\cap(B\cup C)]-[\underbrace{A\cap(B\cap C)}_{\text{Tek kuvvet}}]$$

$$\overset{\text{"}\cap\text{"nın "}\cup\text{" üzerine sol dağ. öz.}}{=}((A\cap B)\cup(A\cap C))-((A\cap A)\cap(B\cap C))$$

$$\overset{\text{"}\cap\text{"nın değişme ve birleşme öz.}}{=}((A\cap B)\cup(A\cap C))-((A\cap B)\cap(A\cap C))$$

$$\overset{\text{"}\triangle\text{" tanımı}}{=}(A\cap B)\triangle(A\cap C)$$

edelim Yani kabul

4) b) Aksini kabul edelim ki $\sqrt{5}$ sayısı irrasyonel olmasın. O halde rasyoneldir ve $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$, a ve b tek sayı formunda yazılabilir. Bu durumda $a = \sqrt{5} b$

$\Rightarrow a^2 = 5b^2$ olur. a ve b tek sayı ise

$a = 2k+1$ $b = 2l+1$ o.ş $k, l \in \mathbb{Z}$ vardır

$$a^2 = 5b^2 \Rightarrow (2k+1)^2 = 5.(2l+1)^2$$

$$\Rightarrow 4k^2 + 4k + 1 = 5(4l^2 + 4l + 1)$$

$$\Rightarrow 4k^2 + 4k + 1 = 20l^2 + 20l + 5$$

$$\Rightarrow 4k^2 + 4k = 20l^2 + 20l + 4$$

$$\Rightarrow \underbrace{k^2 + k}_{\text{Her zaman çifttir}} = \underbrace{5l^2 + 5l + 1 = 5\underbrace{(l^2+l)}_{\text{çift}} + 1}_{\text{Her zaman tektir}}$$

Bu eşitlik gerçeklenemez. Bu bir çelişkidir

O halde $\sqrt{5}$ sayısı irrasyoneldir

5) $\tau = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}^*, a.b > 0\}$.

Yansıma : $\forall a \in \mathbb{R}^*$ için $(a,a) \in \tau$ olur mu?

$a.a = a^2 \, (a \neq 0) > 0$ olup $(a,a) \in \tau$ dur

Yansıma sağlanır

Simetri : $(a,b) \in \tau$ o.ş $\forall a, b \in \mathbb{R}^*$ için $(b,a) \in \tau$ olur mu?

$(a,b) \in \tau \Rightarrow a.b > 0 \Rightarrow b.a > 0 \Rightarrow (b,a) \in \tau$ olur

Simetri sağlanır

Scanned with CamScanner

'in devamı :

<u>Geçişme</u> : $(a,b) \in \tau \wedge (b,c) \in \tau$ a.ş. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}^*$

iken $(a,c) \in \tau$ olur mu?

$$\left.\begin{array}{l}(a,b) \in \tau \Rightarrow ab > 0 \\ (b,c) \in \tau \Rightarrow b.c > 0\end{array}\right\}$$

b pozitif ise $\left.\begin{array}{l}a>0 \\ c>0\end{array}\right\} \Rightarrow ac>0$

b negatif ise $\left.\begin{array}{l}a<0 \\ c<0\end{array}\right\} \Rightarrow ac>0$

olup her durumda $a.c > 0 \Rightarrow (a,c) \in \tau$ olup

geçişme sağlanır. τ bir denklik bağıntısıdır

$$\overline{\frac{1}{3}} = \{x \in \mathbb{R}^* \mid x \tau \tfrac{1}{3}\} = \{x \in \mathbb{R}^* \mid \tfrac{x}{3} > 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^* \mid x > 0\}$$

$$= \mathbb{R}^+$$